LIMO

Antwoorden 2008

Master Mathematics

Het Mathematisch Instituut streeft naar excellentie in onderzoek én onderwijs.
Als student maak je deel uit van een van de toonaangevende onderzoeksgroepen van het instituut, met persoonlijke en informele begeleiding van de staf.
Zo maken studenten en docenten samen onze opleiding, gedreven door hun interesse, expertise en goede contacten in de wetenschappelijke wereld en het bedrijfsleven.
Voor een Master Mahtematics is Leiden een uitstekende keuze!

De Universiteit Leiden biedt vijf mastertracks aan binnen de Master Mathematics:

Algebra, Geometry and Number Theory
Applied Mathematics
Mathematics and Science Based Business
Mathematics and Education
Mathematics and Communication

Een internationale of interdisciplinaire invulling, bijvoorbeeld met natuurkunde, astronomie of levenswetenschappen, kun je in overleg realiseren.

Meer weten? voorlichting@math.leidenuniv.nl

Universiteit Leiden

www.mastersinleiden.nl

1 Dobbelstenen & Legen zonder morsen

Prof.dr. J.M.A.M. van Neerven, TU Delft

Dobbelstenen

Nee. Stel dat het kon. De som der ogen is een van de elf getallen $n = 2, \ldots, 12$, en iedere n heeft gelijke kans $1/11$. Zij p_1 de kans dat de eerste dobbelsteen op een i valt, en q_j de kans dat de tweede dobbelsteen op een j valt. Dan geldt

$$p_1 q_1 = p_6 q_6 = \frac{1}{11}.$$

Ook is de kans op $n = 7$ minstens $p_1 q_6 + p_6 q_1$, hetgeen de ongelijkheid

$$p_1 q_6 + p_6 q_1 \leq \frac{1}{11}$$

oplevert. Combinatie van deze gegevens leidt tot de tegenspraak

$$\frac{1}{11} \geq p_1 q_6 + p_6 q_1 = \frac{p_1}{11 p_6} + \frac{p_6}{11 p_1} = \frac{1}{11}\Big(\frac{p_1}{p_6} + \frac{p_6}{p_1}\Big) \geq \frac{2}{11},$$

waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit de ongelijkheid $x + 1/x \geq 2$, geldig voor alle $x > 0$.

Legen zonder morsen

Noem de glazen respectievelijk A, B, C. We mogen aannemen dat $0 < a \leq b \leq c$. Allereerst merken we op dat het genoeg is om aan te tonen dat we kunnen bereiken dat één der glazen op een zeker moment strikt minder dan a ml bevat (want dan itereren we de procedure en komen vanzelf bij 0 uit).
Zij r de rest bij deling van b door a, zodat $b = qa + r$ met gehele getallen q, r met $0 \leq r < a$. We zullen aantonen dat qa ml van B naar A geschonken kunnen worden; er blijft dan $r < a$ ml over in B.
Als $q = 2^k - 1$ voor een of andere integer k, dan verdubbelen we k maal de inhoud van A met behulp van B. We hebben dan $a + 2a + \ldots + 2^{k-1}a = qa$ ml overgegoten, zoals verlangd.
Als q niet van deze vorm is, dan gieten we steeds vanuit B of C naar A. We nemen de binaire representatie van q, dus $q = \sum_{i=0}^{n} q_i 2^i$ met de q_i gelijk aan 0 of 1, en $q_n = 1$ (zodat $q \geq 2^n$ en $b \geq qa \geq 2^n a$). Als $q_i = 0$, verdubbel dan de inhoud van A vanuit C; als $q_i = 1$, verdubbel dan de inhoud van A vanuit B. Na de i-de beurt bevat A precies $2^i a$ ml. Op deze wijze gieten we in totaal $\sum_{i=0}^{n} q_i 2^i a = qa$ ml over van B naar A. Merk op dat dit inderdaad kan, want $qa \leq b$.

Resteert ons te bewijzen dat er ook genoeg vloeistof in C zit voor deze procedure. Als we in de $(i+1)$-e beurt vanuit C schenken, dan is er in de i beurten daarvóór in totaal al $(2^i - 1)a$ ml naar A overgeschonken en bevat A dus $2^i a \leq 2^{n-1}a$ ml (want $i + 1 \leq n$). In C zit dan nog minstens $c - (2^i - 1)a \geq b - (2^i - 1)a \geq (2^n - 2^i + 1)a \geq (2^{n-1} + 1)a$, genoeg voor een volgende beurt vanuit C (de laatst mogelijke beurt vanuit C is beurt $n - 1$).

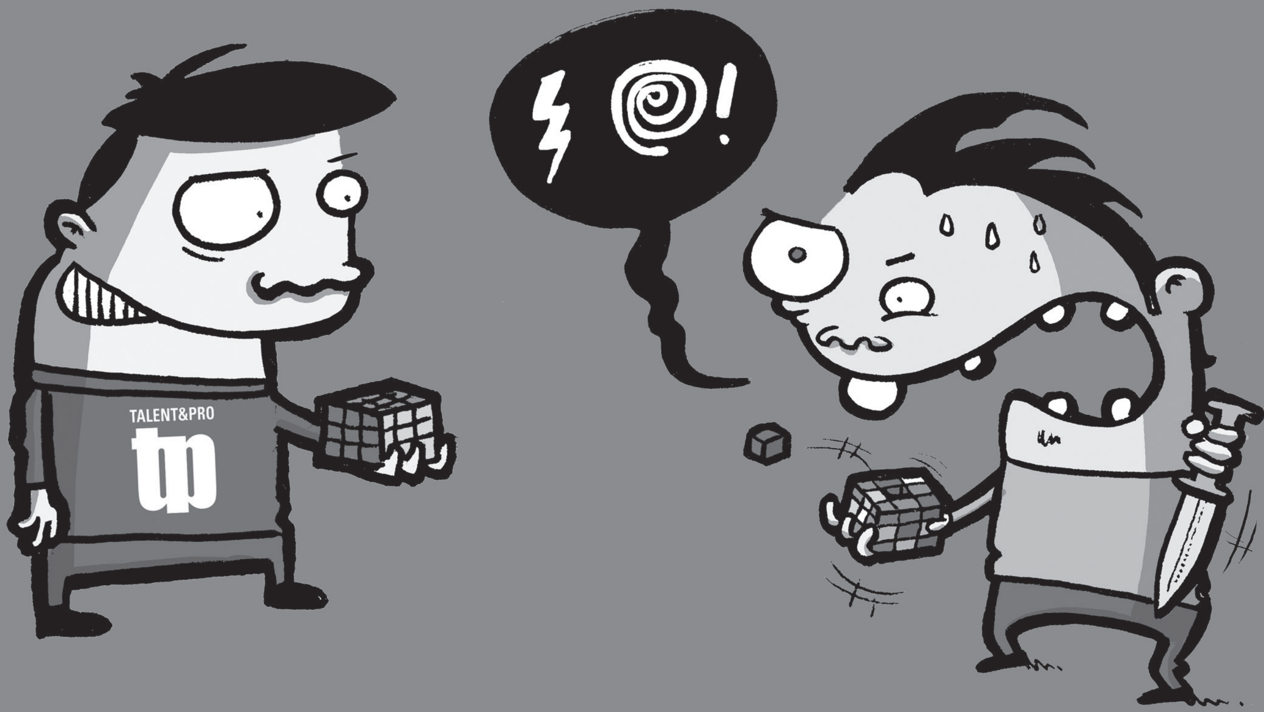
Bron: Beide opgaven staan in Béla Bollobás, "The Art of Mathematics", Cambridge 2006

2 Percolatieroosters

Prof.dr. R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam

a) Het is eenvoudig in te zien dat er ofwel binnen de rechthoek een verbinding van links naar rechts in het gewone rooster is, ofwel een verbinding van boven naar beneden in de bijbehorende rechthoek van het duale rooster, maar niet beide - zie de rechter figuur. Verder hebben deze twee gebeurtenissen dezelfde kans, en concluderen we dus dat de kans wel $1/2$ moet zijn. Dit beantwoordt a).

b) Voor b) doen we iets dergelijks. Allereerst kan er een directe verbinding zijn tussen de genoemde punten - dit gebeurt met kans $1/2$. Als er geen directe verbinding is, dan kijken we naar enerzijds $(0,0)$ en $(1,0)$ in het gewone rooster, en anderzijds naar $(1/2,-1/2)$ en $(1/2,1/2)$ in het duale rooster. Als we de bestaande verbinding tussen $(1/2,-1/2)$ en $(1/2,1/2)$ even negeren, dan volgt uit eenzelfde redenering als bij a) dat ofwel $(0,0)$ en $(1,0)$ in het oorspronkelijke rooster met elkaar verbonden zijn, ofwel $(1/2,-1/2)$ en $(1/2,1/2)$ in het duale rooster, maar niet allebei. Kortom, de kans dat $(0,0)$ en $(1,0)$ 'buitenom' met elkaar verbonden zijn is $1/2$. De gevraagde kans is dus $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/2 = 3/4$, waarbij de eerste $1/2$ slaat op de kans dat ze rechtsstreeks verbonden zijn, etcetera. Merk tenslotte op dat we gebruik hebben gemaakt van het feit dat er geen oneindige clusters zijn - hierdoor weten we zeker dat een van de twee paren met elkaar verbonden is (ga dit na!).


TALENT&PRO
tp

3 Eén van de twaalf!

Prof.dr.ir. H.C.A. van Tilborg, TU Eindhoven

Iedere rij van $H_{3,12}$ bevat evenveel 1-en als -1-en, anders geeft de balans geen evenwicht aan als alle ballen hetzelfde gewicht hebben. We merken ook op dat er $3^3 = 27$ mogelijke weeguitkomsten zijn en dat er $1 + 12 \times 2 = 25$ mogelijke gewichtstoekenningen over de ballen zijn (allemaal van hetzelfde gewicht of bal B_i is zwaarder dan wel lichter, $1 \leq i \leq 12$). Iedere gewichtstoekenning kan dus nog een eigen uitkomstrijtje van de drie wegingen hebben.

a) Als een rij in $H_{3,12}$ 5 enen heeft en dus ook 5 min-enen, dan moet je bij een niet- evenwichtuitkomst nog onderscheid kunnen maken tussen 10 mogelijkheden (in een groep van 5 zit een zwaardere of in de andere groep zit een lichtere) met behulp van de twee overgebleven wegingen. Maar 2 wegingen leiden slechts tot $3 \times 3 = 9$ mogelijke antwoorden. Dit lukt dus niet altijd (en zeker niet bij 6 enen in een rij). Als een rij in $H_{3,12}$ 3 enen heeft en dus ook 3 min-enen, dan moet je bij een evenwicht- uitkomst nog uit $1 + 2 \times 6 = 13$ mogelijkheden kiezen (allen gelijk of een van de 6 is zwaarder of lichter). Maar 2 wegingen leiden slechts tot $3 \times 3 = 9$ mogelijke antwoorden. Dit lukt dus niet altijd (en zeker niet bij < 3 enen in een rij). Iedere rij telt dus vier enen, vier min-enen en vier nullen.

b) Als twee kolommen hetzelfde zijn, kun je nooit een onderscheid maken tussen de overeenkomstige ballen. Als een kolom gelijk is aan min de andere, dan kun je geen onderscheid maken tussen de ene bal die te zwaar is of de andere die te licht is. Elk tweetal kolommen moet dus lineair onafhankelijk zijn.

c) We beginnen met een 3×13 matrix waarin elk tweetal kolommen lineair onafhankelijk is over $\mathbb{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$ (dit is het maximale aantal kolommen met deze eigenschap).

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Het is nu heel gemakkelijk om enige kolommen met -1 te vermenigvuldigen en een geschikte kolom weg te laten om tot een juiste $H_{3,12}$

te komen. Bijvoorbeeld, als je kolommen 3, 4, 6, 10, 12, 13 met -1 vermenigvuldigt, krijg je

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Laat nu kolom 9 weg en je hebt

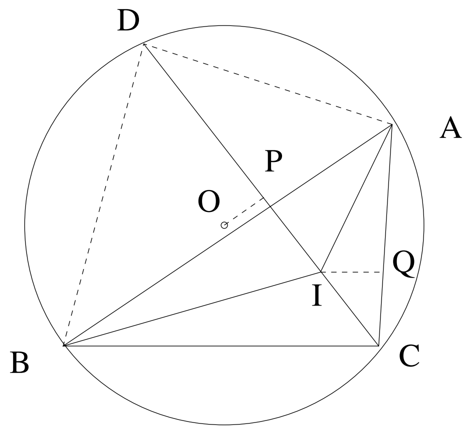
$$H_{3,12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

die inderdaad de eigenschap heeft dat alle kolommen paarsgewijs onafhankelijk zijn en dat rijsommen nul zijn.

Als je de uitkomsten van de drie wegingen als kolom opschrijft, krijg je de nul-kolom als alle ballen gelijk zijn, kolom i als de i-de bal zwaarder is en min kolom i als de i-de bal lichter is.

4 Hollandsche glorie

Prof.dr. J.P. Hogendijk, Universiteit Utrecht & Universiteit Leiden



Ingeschreven cirkel

Er geldt inderdaad wel zo'n formule. Dit is enigszins verbazend, omdat R, r en d alledrie van drie onafhankelijke parameters afhangen (de zijden a, b en c van de driehoek). Daardoor is het a priori niet duidelijk dat d al bepaald is als alleen R en r bekend zijn.

De correcte formule is $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$. Aan de gelijkzijdige driehoek kun je al zien dat De Gelder's formule fout is, want daarvoor geldt $d = 0$ en $R > r$. De formule $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ kun je vinden door rekenen met coördinaten, maar er zijn ook leuke synthetische bewijsjes, bijvoorbeeld het volgende (ontleend aan H. Dörrie, *100 great problems of Elementary Mathematics and their solution*, no. 39): ABC is een driehoek en O is het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is I (de ingeschreven cirkel zelf niet getekend). Dan is I het snijpunt van de bissectrices van de hoeken A, B, C van de driehoek. We bekijken nu het product $CI \cdot ID$ op twee manieren.

Eerste manier: Stel P is het midden van CD. Dan is hoek OPC recht wegens symmetrie. $CI \cdot ID = (CP - PI) \cdot (CP + PI) = CP^2 - PI^2 = (CP^2 + PO^2) - (PI^2 + PO^2) = CO^2 - IO^2 = R^2 - d^2$.

Tweede manier: We gebruiken de eigenschap van de cirkel: een hoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat. Stel $\gamma = \angle ACB$. Je kunt nu een driehoek maken (niet getekend in de figuur) met hoekpunten D, A en M waarbij DM middellijn van de omgeschreven cirkel is; in deze driehoek is $\angle A = 90^o$ en dus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{DA}{DM}$, dus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{DA}{2R}$. Verder geldt (eigenschap van de cirkel) $\angle DAB = \angle DCB = \frac{1}{2}\gamma$, en verder is ook $\angle DIA = \angle IAC + \angle ICA = \angle IAC + \frac{1}{2}\gamma = \angle IAB + \angle DAB$ (want AI is

$DA = DB$). En dus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{DI}{2R}$. Als we IQ loodrecht op AC trekken is $IQ = r$ en dus ook $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{CI}$. Conclusie $\frac{DI}{2R} = \frac{r}{CI}$ dus $CI \cdot ID = 2Rr$. Nu volgt $R^2 - d^2 = 2Rr$.

5 Geordende verzamelingen uit $\mathbb{N}$

dr. K.P. Hart, TU Delft & Universiteit Leiden

a) Kijk eerst naar de aftelbare verzameling $\mathbb{Q}$ van rationale getallen en definieer voor $x \in \mathbb{R}$ de verzameling $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$.

Dan is $\mathcal{A}' = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ als gewenst: de afbeelding $x \mapsto A_x$ is een bijectie van $\mathbb{R}$ naar $\mathcal{A}'$ en als $x < y$ dan $A_x \subset A_y$ (immers $A_x \subseteq A_y$ en $A_y \setminus A_x$ is oneindig). Het enige probleem is dat $\mathcal{A}'$ niet uit deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ bestaat; dit is op te lossen door een bijectie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ te nemen en $\mathcal{A} = \{f[A] : A \in \mathcal{A}'\}$ te zetten.

b) Tel de familie $\mathcal{A}$ af als $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Merk op: als $n \in \mathbb{N}$ dan is $A_n \cap \cup_{i<n} A_i$ eindig en dus is $A_n \setminus \cup_{i<n} A_i$ oneindig en dus niet leeg. Voor elke n bestaat dus $a_n = \min A_n \setminus \cup_{i<n} A_i$. De verzameling $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ is als gewenst omdat $A \cap A_n \subseteq \{a_i : i \leq n\}$ voor elke n.

c) Als in de eerste opgave werken we in de aftelbare verzameling $\mathbb{Q}$. Kies voor elk reëel getal x een strikt stijgende rij rationale getallen $\langle q_{x,n} \rangle_n$ die naar x convergeert en schrijf $A_x = \{q_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$.

- Elke verzameling A_x is oneindig,
- Als $x < y$ dan is er een N zó dat $q_{y,n} > x$ als $n \geq N$, dus $A_x \cap A_y$ is eindig want het is een deelverzameling van $\{q_{y,n} : n < N\}$,
- $x \mapsto A_x$ is dus injectief

De familie $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ is als gewenst.

Opmerking. De laatste oplossing doet een verkapt beroep op het Keuzeaxioma, wie dat wil vermijden kan als volgt te werk gaan. Voor elk *irrationaal* getal $x > 1$ schrijven we

$$A_x = \{\frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$$

waarbij $\lfloor z \rfloor$ het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan z is (de Entier van z). Dan is de zo verkregen familie ook bijna disjunct en gelijkmachtig met $\mathbb{R}$.

Een alternatief: neem als aftelbare verzameling de roosterpunten in het vlak, dus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{\langle m, n \rangle : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Voor $a \in \mathbb{R}$ zij S_a de strook tussen de lijnen met vergelijkingen $y = ax - 1$ en $y = ax + 1$ en voorts zij $A_a = S_a \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Als $a \neq b$ dan is $S_a \cap S_b$ begrensd, dus $A_a \cap A_b$ is eindig. Verder zit er voor elke $m \in \mathbb{Z}$ een geheel getal tussen $am - 1$ en $am + 1$, dus elke A_a is oneindig.

6 2 mod n

Prof.dr. H.W. Lenstra, Universiteit Leiden

Het antwoord is NEE.
Om dit te bewijzen, nemen we aan dat n de genoemde eigenschap heeft en gaan we een tegenspraak afleiden. Uit $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod n$ en het feit dat n deelbaar is door 103 volgt $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod 103$, en omdat 103 oneven is impliceert dit $2^{2n} \equiv 1 \bmod 103$. Ook is 103 priem, dus uit de kleine stelling van Fermat volgt $2^{102} \equiv 1 \bmod 103$. Gecombineerd met de vorige congruentie volgt nu $2^d \equiv 1 \bmod 103$ voor $d = \mathsf{ggd}(2n, 102)$, waarbij $102 = 6 \cdot 17$. Neem nu even aan dat n niet deelbaar is door 17. Dan is d een deler van 6 dus uit $2^d \equiv 1 \bmod 103$ volgt $2^6 \equiv 1 \bmod 103$; maar dat is niet waar, want $2^6 = 64$ and 63 is niet deelbaar door 103. Hieruit volgt dat n wel deelbaar is door 17. Uit de oorspronkelijke congruentie $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod n$ volgt dan $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod 17$ en wegens het feit dat 17 een oneven priemgetal is krijgen we $2^{2n} \equiv 1 \bmod 17$. Maar $2^4 = 16 \equiv -1 \bmod 17$ dus $2^8 \equiv 1 \bmod 17$. Dan voldoet $e = \mathsf{ggd}(2n, 8)$ aan $2^e \equiv 1 \bmod 17$. Ook is e een deler van 8, en omdat 2^1, 2^2, en 2^4 geen van alle 1 modulo 17 zijn, moet $e = 8$ gelden, dus $2n$ is deelbaar door 8 en n is deelbaar door 4. De oorspronkelijke congruentie $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod n$ geeft nu $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod 4$, maar dat kan niet, want de linkerkant is deelbaar door 4 maar de rechter niet. Deze tegenspraak beeindigt het bewijs.

7 Een stabiele numerieke methode voor stromingsproblemen

Prof.dr.ir. B. Koren, CWI & Universiteit Leiden

a)
Beschouw de algemene discrete vergelijking

$$\alpha u_{l+1,m} + \beta u_{l,m-1} + \gamma u_{l,m+1} = 0, \tag{1}$$

met α, β en γ te bepalen constante coëfficiënten. Taylor-reeksontwikkeling van $u_{l+1,m}$, $u_{l,m-1}$ en $u_{l,m+1}$ om $u_{l,m}$ en substitutie van deze reeksontwikkelingen in (1) levert, de indices l en m voor het gemak weglatend:

$$\begin{aligned}
\alpha\left(u + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) &+ \\
\beta\left(u - \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\Delta x^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) &+ \\
\gamma\left(u + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6}\Delta x^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) &= \text{h.o.t.} \Longleftrightarrow \\
(\alpha+\beta+\gamma)u + \alpha\Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + (-\beta+\gamma)\Delta x\frac{\partial u}{\partial x} &+ \\
\alpha\frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\beta+\gamma)\frac{1}{2}\Delta x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (-\beta+\gamma)\frac{1}{6}\Delta x^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \text{h.o.t.}
\end{aligned} \tag{2}$$

Om de algemene vervangende vergelijking (2) een benadering te laten zijn van onze modelvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

moet dus gelden:

$$\alpha+\beta+\gamma = 0, \qquad \alpha\Delta t = 1, \qquad (-\beta+\gamma)\,\Delta x = a. \tag{4}$$

Hieruit volgt:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t}, \qquad \beta = -\frac{a}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta t}, \qquad \gamma = \frac{a}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta t}, \tag{5}$$

en daarmee, door substitutie in (1), de gevraagde eindige-differentievergelijking:

$$\frac{u_{l+1,m} - \frac{1}{2}\left(u_{l,m+1} + u_{l,m-1}\right)}{\Delta t} + a\frac{u_{l,m+1} - u_{l,m-1}}{2\Delta x} = 0. \tag{6}$$

Deze discretisatiemethode is de bekende Lax-Friedrichs methode, vernoemd naar de wiskundigen Peter Lax en Kurt Otto Friedrichs. In 2005 was Lax winnaar van de (voor zover ik weet) grootste prijs in de wiskunde: de *Abel-prijs*. Voor een beknopte biografie van Lax, zie[1]. Friedrichs was de promotor van Lax.

b)
Substitutie van de bovenstaande uitdrukkingen voor de coëfficiënten α, β en γ in (2) levert direct de vervangende vergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \text{h.o.t.} \tag{7}$$

Vervangende vergelijking (7) laat zien dat eindige-differentievergelijking (6) consistent is onder een voorwaarde. Voor $\Delta t \downarrow 0$ en $\Delta x \downarrow 0$ convergeert (7) naar (3) onder de voorwaarde dat Δt niet veel kleiner wordt dan Δx. In het geval dat Δx wordt vastgehouden terwijl Δt wordt verkleind zal de fout-term $-\frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ alsmaar groter worden! Deze foutterm is een diffusieterm en komt, in tegenstelling tot de fouttermen $\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en $a\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, niet voor in de vervangende vergelijking voor de voorbeeld-eindige-differentiemethode uit de inleiding tot de opgaven.

c)
Substitutie van de discrete Fourier-vorm $u_{l,m} = U\rho^l e^{\mathrm{i}km}$ in discrete vergelijking (6) levert als uitdrukking voor de versterkingsfactor ρ:

$$\rho = \cos k - \mathrm{i}\frac{a\Delta t}{\Delta x}\sin k. \tag{8}$$

Aan de stabiliteitseis $|\rho| \leq 1$ wordt dus voldaan indien

$$\left|\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1. \tag{9}$$

De Lax-Friedrichsmethode is dus stabiel onder een voorwaarde. De methode is bruikbaar, in tegenstelling tot de methode uit de Inleiding tot de opgaven. Door iets aan nauwkeurigheid in te leveren is stabiliteit verkregen.

[1]B. Koren, Computational Fluid Dynamics: science and tool, *The Mathematical Intelligencer*, **28**, pp. 5–16 (2006). Also available as CWI-report: http://ftp.cwi.nl/CWIreports/MAS/MAS-E0602.pdf.

8 Polynomen en niet-lineaire recursie

Prof.dr. W. v. Assche, Katholieke Universiteit Leuven

Polynomen:
P is een polynoom van graad $n+m$ en de integralen zijn nul voor $0 \leq k \leq m-1$ en $0 \leq \ell \leq n-1$. Aantonen doe je via partiële integratie en het feit dat P ook voldoet aan

$$P(x) = e^{x(x-a)} \left(\frac{d^m}{dx^m} e^{(a-b)x} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{x(b-x)} \right) \right).$$

Niet-lineaire recursie:
Dit kan je aantonen via een transformatie T die werkt op oneindige rijen $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ waarvoor $x_0 = 1$ en $0 < x_n < 1$ als $n \geq 1$, met

$$(Tx)_0 = 1, \qquad (Tx)_n = g\left(\frac{2(x_{n+1} + x_{n-1})}{n} \right), \quad n \geq 1,$$

waarbij

$$g(x) = \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}}.$$

Dit is een contractie en het vaste punt met $Tx = x$ voldoet aan de niet-lineaire recursie.

Ken je TOPdesk al?

Onthoud deze werkgever voor als je straks een leuke baan of afstudeerplek zoekt! Je kunt er jezelf zijn. Je krijgt de ruimte om je te ontwikkelen, je ondernemerschap te tonen en je profiteert van de voordelen van een jonge, professionele cultuur.

Voor de tweede achtereenvolgende keer is **TOPdesk verkozen tot een van de leukste werkgevers van Nederland**. In het Intermediair-onderzoek naar de meest tevreden werknemers behaalde TOPdesk, van 71 werkgevers, de derde plaats.
Wij zijn trots op onze derde plek! En nog trotser op de dikke 9 die we scoren op ‘Werksfeer’. Hieruit mogen we concluderen dat we écht de leukste werkgever van Nederland zijn!!

Welke kansen wij je bieden?

Check voor de start van je carrière onze vacatures. Op onze site vind je ook goede én leuke voorbeelden van afstudeeropdrachten, mocht je nog inspiratie nodig hebben.

Neem voor meer informatie contact op met Anne of Rik van de afdeling P&O. Of stuur je sollicitatiebrief direct naar **vacatures@topdesk.nl**.

TOPdesk
Martinus Nijhofflaan 2, 2624 ES Delft
015 2 700 900
vacatures@topdesk.nl

www.topdesk.nl/werk

9 Weyl identiteit

Dr. F. H. J. Redig, Universiteit Leiden

a) Indien A, B commuteren dan geldt de klassieke binomiaalformule

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k} n!}{(n-k)!k!},$$

met andere woorden we kunnen met A, B rekenen alsof het getallen betreft. Dit substitueren in de Taylorreeks van de exponentiële geeft

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{r!} A^k B^r \\ &= e^A e^B. \end{aligned} \tag{10}$$

b) Als $P(t) = e^{tA}$ dan geldt $P'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$. Immers, A commuteert met alle machten van A en dus ook met e^{tA}. Dit geeft

$$\begin{aligned} g'(t) &= -e^{-t(A+B)}(A+B)e^{tA}e^{tB} + e^{-t(A+B)}Ae^{tA}e^{tB} + e^{-t(A+B)}e^{tA}Be^{tB} \\ &= e^{-t(A+B)}(e^{tA}B - Be^{tA})e^{tB} = e^{-t(A+B)}[e^{tA}, B]e^{tB}. \end{aligned} \tag{11}$$

Vervolgens, omdat $e^O = I$ (met O de nulmatrix) geldt duidelijk $g(0) = e^{-O}e^Oe^O = I$

c)

$$h'(t) = e^{tA}ABe^{-tA} - e^{tA}BAe^{-tA} = e^{tA}[A,B]e^{-tA}.$$

d) We gebruiken dat indien C en D commuteren met A, dan geldt $[A, CBD] = ACBD - CBDA = C(AB - BA)D = C[A,B]D$. Er geldt

$$[A, h'(t)] = [A, e^{tA}[A,B]e^{-tA}] = e^{tA}[A,[A,B]]e^{-tA} = 0.$$

Verder,

$$h''(t) = e^{tA}[A,[A,B]]e^{-tA} = 0.$$

Omdat $h(0) = B$ en $h''(t) = 0$ geldt

$$h(t) = h(0) + th'(0) = B + t[A, B].$$

Dit geeft

$$e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A, B],$$

In beide leden van deze gelijkheid met e^{tA} vermenigvuldigen geeft

$$e^{tA}B = Be^{tA} + t[A, B]e^{tA}$$

of

$$[e^{tA}, B] = t[A, B]e^{tA}.$$

e) We nemen aan dat A, B beide commuteren met $[A, B]$. Dan commuteert $[A, B]$ ook met $A + B$ en met elke functie van A, B of $A + B$. Gebruik makend van onderdeel b) en d) krijgen we

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{-t(A+B)}[e^{tA}, B]e^{tB} \\ &= e^{-t(A+B)}t[A, B]e^{tA}e^{tB} \\ &= t[A, B]e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB} = t[A, B]g(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Indien we stellen

$$g(t) = e^{t^2[A,B]/2}, \tag{13}$$

dan vinden we $g'(t) = t[A, B]g(t)$ en $g(0) = I$ dus is het rechterlid van 13 inderdaad de oplossing van 12.

f) Combinatie van onderdeel b) en e) geeft

$$e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB} = e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}.$$

Stellen we nu $t = 1$ en vermenigvuldigen we links met $eA + B$ dan krijgen we

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Tenslotte gebruiken we het gegeven dat $[A, B]$ commuteert met A, B en dus ook met e^{A+B}. We krijgen

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

BIJ DE UVA MAAK JE WERK VAN JE MASTER

Kiezen voor een bètamaster aan de Universiteit van Amsterdam betekent kiezen voor een inspirerende master. Want de onderzoeksresultaten van vandaag verwerken UvA-wetenschappers in de colleges van morgen.

Prof. dr. Robbert Dijkgraaf
Hoogleraar Mathematische fysica aan de UvA

'Onze bètafaculteit is the place to be. Je krijgt geen saaie logaritmesommetjes, maar leert al snel om na te denken over de lekkere hapjes in de wis- en natuurkunde en komt in aanraking met het nieuwste onderzoek. Het zijn immers de twintigers die in de bètawetenschappen voor de grote doorbraken zorgen.'

Masters in Mathematics

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics
- Mathematics and Science Education

De masters binnen wiskunde aan de UvA duren twee jaar en zijn Engelstalig. De masters Mathematics en Stochastics and Financial Mathematics worden verzorgd in samenwerking met de Vrije Universiteit Amsterdam.

Onderwijs door toponderzoekers

Als je instroomt in een master binnen wiskunde aan de UvA dan kun je college krijgen van toponderzoekers als Spinozaprijswinnaars prof. dr. Robbert Dijkgraaf (Mathematische fysica) en prof. dr. Lex Schrijver (Discrete wiskunde en optimalisering). Bovendien verzorgt internationaal toponderzoeker prof. dr. Nicolai Reshetikhin van de University of California in Berkeley sinds voorjaar 2008 een college binnen de master Mathematical Physics.

Wiskundig onderzoek aan de UvA

Het wiskundig onderzoek aan de UvA vindt plaats binnen het Korteweg-de Vries Instituut voor wiskunde (KdVI). Het onderzoek strekt zich uit van zuivere wiskunde, inclusief logica, tot toegepaste wiskunde, statistiek en financiële wiskunde. Binnen het Instituut voor Bedrijfs- en Industriële Statistiek (IBIS) dat opereert binnen het bedrijfsleven, wordt onderzoek gedaan in de industriële statistiek. Tevens is de UvA de enige algemene universiteit in Nederland met een leerstoel Numerieke wiskunde.

Voor meer informatie:

www.studeren.uva.nl/science-masters
www.science.uva.nl/math

10 Gesloten in $\mathbb{C}$

Prof.dr. J. Top, Rijksuniversiteit Groningen

Identificeer de verzameling μ_n van alle n-de eenheidswortels met de verzameling $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ van alle getallen modulo n, via $\zeta^m \mapsto \overline{m} = m \bmod n$. De verzameling S correspondeert dan met

$$S' := \cup_{j=0}^{\infty} \left\{ 2^j\overline{1}, 2^j\overline{2}, 2^j\overline{3}, \ldots, 2^j\overline{2^a} \right\}$$

en $\overline{S}$ met $-S' := \{-s' \mid s' \in S'\}$. Iedere $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ met $\overline{m} \neq 0$ heeft een unieke representant in $\mathbb{Z}$ met een binaire ontwikkeling $b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \ldots + b_{2a}2^{2a}$ (dus met alle $b_j \in \{0, 1\}$). Het aantal coefficienten $b_j = 1$ hierin is voor $\overline{m}$ en $2\overline{m}$ gelijk, want

$$2(b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \ldots + b_{2a}2^{2a}) \equiv b_{2a} + b_0 \cdot 2 + \ldots + b_{2a-1}2^{2a} \bmod 2^{2a+1} - 1.$$

Voor de elementen van S' is dit aantal minstens 1 en hoogstens a, en voor die van $-S'$ minstens $a + 1$ en hoogstens $2a$.
En dus zijn S' en $-S'$ disjunct.
Merk op, dat dit argument zelfs een sterkere uitspraak bewijst dan de in de opgave genoemde: de bewering blijft waar, als de tweede voorwaarde wordt vervangen door

(2') voor elke gehele k met $1 \leq k \leq 2^{a+1} - 2$ geldt $\zeta^k \in S$.