Opgavenboekje

LIMO

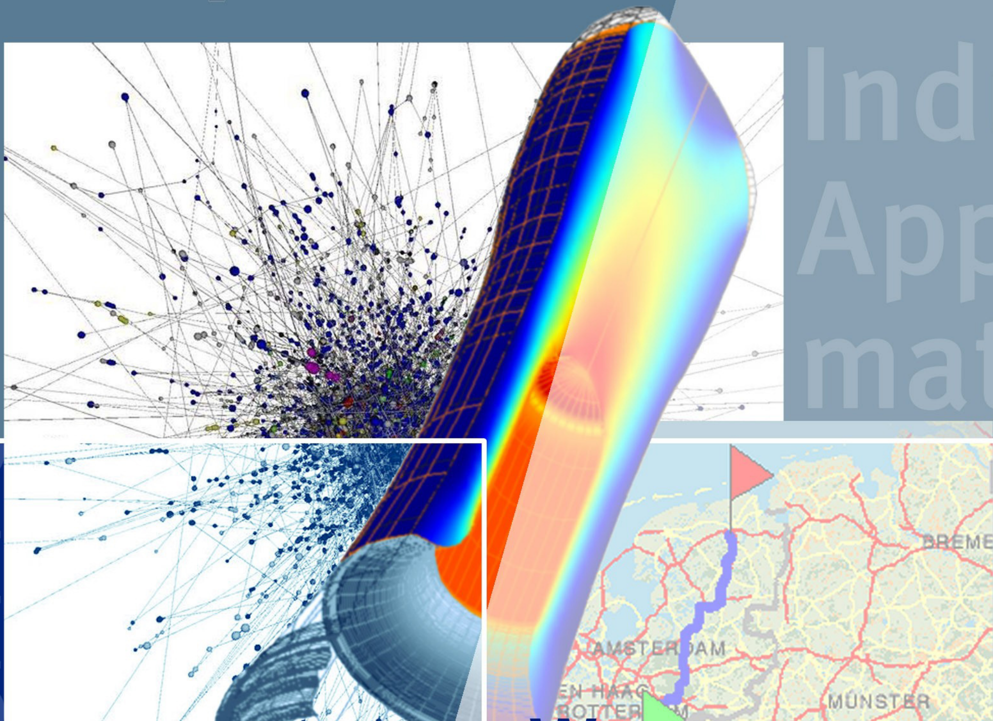
Nijmegen

Vrijdag
2 juni 2006

Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade 2006

TU/e technische universiteit eindhoven

Industrial an
Applied
mathematics



Waarom masteropleiding Industrial and Applied Mathematics?

- ontwikkeling nieuwe en innovatieve technologie
- wiskundige modellering
- bijdragen aan problemen uit technologie en industrie
- in Eindhoven in high-tech omgeving

Industrial and Applied Mathematics:

3 specialisaties

- Computational Science and Engineering
  Complexe natuurkundige en technische processen analyseren en simuleren
- Discrete Mathematics and Applications
  Van crystallografische roosters tot optimalisering van netwerken en chips, van computeralgebra tot cryptografische schema's
- Statistics, Probability, and Operations Research
  Modellering, analyse en optimalisatie van deterministische en toevallige processen

Meer info: www.win.tue.nl/iam

Voorwoord

Na het succes van de eerste Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade vorig jaar in Leiden, zijn wij trots dat Desda dit jaar de LIMO mag organiseren aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Het afgelopen jaar hebben we vergaderd, gebeld, gemaild, geregeld, gelachen en soms gestresst. Dat alles om ook de tweede LIMO tot een succes te maken. Wij kijken met veel plezier terug op alle voorbereidingen en met jullie medewerking en enthousiasme wordt vandaag de kroon op ons werk.
Het draait vandaag om de wiskundige 'krachtmeting' tussen de universiteiten. Iedereen wil natuurlijk laten zien dat zijn universiteit de sterkste wiskundestudenten in huis heeft. Tien uitdagende opgaven gemaakt vanuit verschillende vakgebieden en universiteiten zullen jullie wiskundig vernuft toetsen. Wij zijn de opgavenmakers erg dankbaar, want zonder hen is de LIMO niet mogelijk.
Naast het competitieve element is de LIMO bovenal een dag die wiskundestudenten uit heel Nederland samenbrengt. De borrel en het diner na afloop bieden de gelegenheid om nader kennis te maken en na te praten.
Wij hopen dat er vanmiddag, of in de komende weken, een nieuwe LIMO-commissie opstaat en deze ontluikende traditie volgend jaar wil voortzetten.

Tot slot nog enkele 'huishoudelijke mededelingen'. De opgaven liggen qua moeilijkheidsgraad net boven de eerste- en tweedejaarstentamenstof. De LIMO is een wedstrijd in teamverband en samenwerking is vaak nodig om deze pittige vraagstukken op te lossen.
Maak elke opgave op een apart blad en schrijf op elk blad je teamnaam. Zo kunnen de opgaven snel worden nagekeken en hoeven jullie niet lang in spanning te zitten tot de prijsuitreiking. Het gebruik van een gewone of grafische rekenmachine is toegestaan. Geavanceerdere elektronische hulpmiddelen (zoals laptops) en boeken mogen daarentegen niet gebruikt worden.

Heel veel succes de komende drie uur en tot straks bij de borrel!

De LIMO-commissie 2006

Dion Coumans
Janneke van den Boomen
Martijn Caspers
Stijn Meurkens

1 Een eigenwaardenprobleem

M.A. Botchev, Universiteit Twente

Dit is een klassiek probleem dat in verschillende toepassingen voorkomt, bijvoorbeeld bij het numeriek oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen met behulp van de eindige elementenmethode (we danken Ferenc Izsák voor het onder de aandacht brengen van dit probleem). We beginnen met de volgende definitie:

Definitie Voor twee matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ definiëren we hun Kroneckerproduct $A \otimes B$ als de volgende matrix

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn\times mn}.$$

Bijvoorbeeld als $m = n = 2$ hebben we

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Opgave Gegeven zijn twee matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die elk een volledig stelsel van eigenvectoren hebben, met andere woorden, er bestaan niet-singuliere matrices $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ en diagonaalmatrices

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \text{en} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

zodanig dat

$$AV = V\Lambda, \qquad BW = W\Gamma. \tag{1}$$

De lineair onafhankelijke kolommen van de matrices V en W zijn respectievelijk de eigenvectoren van A en B.

Bewijs dat de eigenwaarden van $A \otimes B$ zijn

$$\{\lambda_i\gamma_j,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Bepaal verder een matrix waarvan de kolommen de eigenvectoren van $A \otimes B$ zijn.

Hint Gebruik relaties (1) en het volgende lemma:

Lemma *Voor elke twee gehele getallen m en n bestaat er een matrix $P \in \mathbb{R}^{mn\times mn}$ zodanig dat voor alle matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ geldt*

$$P^T(A \otimes B)P = B \otimes A.$$

De matrix P is tevens orthogonaal: $P^{-1} = P^T$.

2 Priemgetallen

F.J. Keune, Radboud Universiteit Nijmegen

De rij a_0, a_1, a_2, ... van gehele getallen is gegeven door

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n \quad \text{voor alle } n \geq 0. \end{cases}$$

Bewijs dat $a_p \equiv 1 \pmod{p}$ voor alle priemgetallen p.

3 Pi als breuk?

N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

Aan het eind van de achttiende eeuw bewezen Lambert en Legendre dat π niet rationaal is, i.e. van de vorm p/q met p en q gehele getallen. In deze opgave geef je een bijzonder eenvoudig analytisch bewijs van dit feit. Het is een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat π rationaal is, dan is π^2 dat ook, zodat $\pi^2 = a/b$ met $a, b \in \mathbb{N}$. Je gaat nu een tegenspraak afleiden.

N.B. Voor het oplossen van iedere volgende opgave mag je de te bewijzen bewering van een vorige opgave gebruiken. De opgaven zijn zodoende onafhankelijk te maken.

Definieer

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

waarbij $n \in \mathbb{N}$ later zal worden bepaald, en daaruit

$$F_n(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x),$$

ofwel $F_n(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right)$.

1. Bewijs dat $F_n(0)$ en $F_n(1)$ gehele getallen zijn.
2. Bewijs dat $\pi a^n \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) dx = F_n(1) + F_n(0)$.
3. Bewijs hieruit dat $0 < F_n(1) + F_n(0) < \pi a^n / n!$.
4. Leid nu met behulp van de Stirlingformule: $n! \sim \sqrt{s\pi n}\, e^{-n} n^n$ een tegenspraak af.

4 Een toren van machten

H.W. Lenstra, Universiteit Leiden

Bepaal of er positieve gehele getallen a, b, n en m bestaan, zo dat $a \neq b$, $n \geq 2$, $m \geq 2$ en

$$\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right\}n = \left.b^{b^{b^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b}}}}}}\right\}m.$$

5 De ijzergieterij

R.D. Nobel, Vrije Universiteit

Het bedrijf Complex wil elke maand een n-tal verschillende legeringen maken uit m verschillende metalen. Deze metalen zijn niet onmiddellijk beschikbaar maar moeten via een serie van twee bewerkingen, *smelten* en *onttrekken*, verkregen worden uit een t-tal ertsen die bedrijf Complex elke maand moet inkopen. De inkoopprijs van één ton erts k is C_k $(k = 1, \ldots, t)$.

Van elke erts kan onbeperkt veel worden ingekocht, maar het totale tonnage aan ingekocht erts mag vanwege de beschikbare verwerkingscapaciteit niet meer dan E bedragen.

Het smelten van een ton van erts k kost een bedrag S_k en neemt een tijd T_k uur in beslag.

Het onttrekken van metaal i uit gesmolten erts k kost een bedrag D_{ik} *per ton metaal* i, en neemt, opnieuw per ton metaal i, een tijd F_{ik} uur in beslag.

Verder is gegeven dat in één ton van erts k een percentage P_{ik} aan metaal i zit $(i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, t)$. In legering j wil bedrijf Complex hoogstens een percentage Q_{ij} van metaal i opnemen en minstens een percentage R_{ij} $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$.

Het bij elkaar voegen en goed mengen van de verschillende metalen, nodig voor een optimale kwaliteit van de legering, kost voor elke ton van legering j een bedrag B_j, en neemt voor elke ton een tijd U_j uur in beslag. Alle bewerkingen (smelten van de verschillende ertsen, het onttrekken van de verschillende metalen uit de verschillende ertsen en het mengen van de metalen voor de verschillende legeringen) worden *na elkaar* uitgevoerd.

In totaal is W uur per maand beschikbaar voor alle werkzaamheden bij elkaar, maar aan het smelten mag hoogstens 30 procent van deze tijd besteed worden. Het onttrekken van de metalen dient tussen de 40 en 60 procent van de tijd in beslag te nemen en aan het bij elkaar voegen en mengen van de metalen moet minstens 10 procent van de tijd besteed worden.

Het bedrijf Complex is verplicht elke maand van legering j minstens V_j ton te produceren. De legering j wordt door Complex verkocht voor een bedrag van G_j per ton. De vraag naar alle legeringen veronderstellen we onbeperkt. Uiteraard is Complex geïnteresseerd in een productieplan dat een maximale winst per maand oplevert.

Formuleer dit probleem van Complex als een lineair programmeringsprobleem. We nemen aan dat aan alle lineariteitseisen voldaan is, dus, om een voorbeeld te noemen, het smelten van twee ton erts vergt twee keer zoveel tijd als het smelten van één ton, ook al is dit misschien niet geheel realistisch.

6 Bijzondere functies

F. Takens, Rijksuniversiteit Groningen

We beschouwen continue reële afbeeldingen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. We noemen $p \in \mathbf{R}$ een periodiek punt voor f met periode k als $f^k(p) = p$ en $f^i(p) \neq p$ voor $i = 1 \ldots k-1$. (Deze terminologie sluit aan bij de interpretatie van $(\mathbf{R}, f)$ als dynamisch systeem: $\mathbf{R}$ is de verzameling van alle mogelijke toestanden en f beeldt elke toestand af op de toestand die daar na één tijdstap op volgt.)

Stel nu dat f een periodiek punt p heeft met periode vier, en wel zo dat $p = f^4(p) < f(p) < f^3(p) < f^2(p)$. Toon aan dat voor elke k de afbeelding f een periodiek punt heeft met periode k.

KNAW

7 Naar beneden afronden

R. Tijdeman en S.W. Rosema, Universiteit Leiden

Stel $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ met $ad - bc = \pm 1$. Zij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal $\leq x$.

a) Stel $a > 1, b > 1$. Bewijs dat $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d}{b} \right\rfloor$.

b) Stel $a > 0, b \geq 0, a + b > c + d$. Bewijs dat $a \geq c$.

Groningen Math Masters

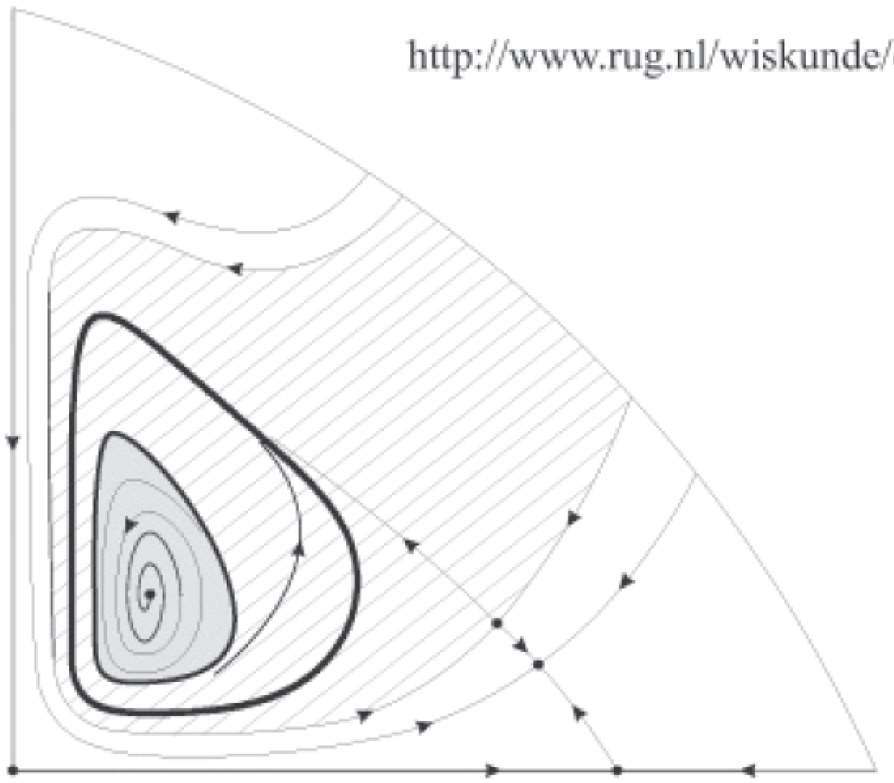
RuG

Wiskunde
Mathematics

Technische Wiskunde
Mathematics and Technology

Bedrijfswiskunde
Business Mathematics

http://www.rug.nl/wiskunde/onderwijs/master



8 Magische vierkanten

A.R.P. van den Essen, Radboud Universiteit Nijmegen

Zij M een 3×3 magisch vierkant, dat wil zeggen een 3×3-matrix waarin de som van alle getallen in iedere rij, kolom en ieder van de twee hoofddiagonalen hetzelfde is.

Laat zien dat voor ieder oneven natuurlijk getal n de matrix M^n een magisch vierkant is. Hierbij wordt onder M^n verstaan het matrix produkt van n factoren M.

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam.
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

For master- and Ph.D.-students the Stieltjes Institute organises each year a Stieltjesweek about a central theme in mathematics. Faculty members of the different universities present the lectures about such a new theme.
Each Stieltjes phd-student receives a contribution of 250 euro in the printing costs of the thesis.
Each year a Stieltjes Prize is presented for the best Stieltjes thesis and the winner receives an amount of 1200 euro.

---

http://www.stieltjes.org/
stieltjes@math.leidenuniv.nl
+31 71 527 7042

9 Bernoulli-polynomen

J. Top en G. Tiesinga, Rijksuniversiteit Groningen

Acht jaar na zijn dood, verscheen in Bazel het boek *Ars Conjectandi* van Jakob Bernoulli. Jakob was de oom van de in Groningen geboren Daniel Bernoulli (1700) en de broer van Johann, die van 1695 tot 1705 hoogleraar in Groningen was en vandaar vertrok om zijn overleden broer in Bazel te kunnen opvolgen.

In *Ars Conjectandi* leidt Jakob onder meer een formule af voor $\sum_{k=0}^{n} k^m$, in termen van wat tegenwoordig een *Bernoullipolynoom* heet. We noteren $\mathcal{P}$ voor de lineaire ruimte over $\mathbb{Q}$ bestaande uit alle veeltermen in de variabele x, met rationale getallen als coëfficiënten. Op $\mathcal{P}$ beschouwen we drie lineaire operatoren, namelijk

$$
\begin{array}{llll}
D & : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} & \text{gegeven door} & D(f) = \frac{df}{dx} \\
\Delta & : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} & \text{gegeven door} & \Delta(f) = f(x+1) - f(x) \\
\varphi & : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} & \text{gegeven door} & \varphi(f) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt
\end{array}
$$

(a) Toon aan dat $\Delta = \varphi \circ D = D \circ \varphi$ en $\Delta \circ \varphi = \varphi \circ \Delta$ en $\Delta \circ D = D \circ \Delta$.

(b) Bewijs verder dat φ inverteerbaar is.

Voor elk geheel getal $n \geq 0$ definiëren we het n-de Bernoullipolynoom $B_n(x)$ door

$$B_n(x) := \varphi^{-1}(x^n).$$

(c) Bewijs de volgende eigenschappen van de Bernoullipolynomen.

1. $B_n(x)$ heeft graad n.
2. $\frac{dB_n(x)}{dx} = nB_{n-1}(x)$ voor $n \geq 1$.
3. $\Delta(B_n(x)) = nx^{n-1}$ voor $n \geq 1$.
4. $\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{(B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0))}{(m+1)}$ voor $n \geq 1, m \geq 0$.
5. $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(x) = x^n$.
6. $B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (x+k)^n$.

10 Een statistisch vraagstuk

A.W. van der Vaart en R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam

Laat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke reëelwaardige stochastische grootheden zijn, met kansdichtheid

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{(x-\mu)/\sigma}$$

voor $x \leq \mu$ en $f(x) = 0$ voor $x > \mu$. Hierin zijn $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$ constanten.

We definiëren

$$\hat{\mu}_n = \max(X_1, \ldots, X_n), \qquad \hat{\sigma}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\mu}_n - X_i), \qquad S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu - X_i).$$

Een rij stochastische grootheden T_n convergeert in verdeling naar de (continue) verdelingsfunctie F als voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n \leq x) = F(x).$$

N.B. Voor het oplossen van iedere volgende opgave mag je de te bewijzen bewering van een vorige opgave gebruiken. De opgaven zijn zodoende onafhankelijk te maken.

1. Bewijs dat $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$ de meest aannemelijke schatter van (μ, σ) is.
2. Laat zien dat de rij stochastische grootheden $n(\hat{\mu}_n - \mu)$ in verdeling naar een limiet convergeert.
3. Gebruik de centrale limietstelling om te bewijzen dat de rij stochastische grootheden $\sqrt{n}(S_n - \sigma)$ in verdeling naar een normale verdeling convergeert.
4. Bewijs dat de rij stochastische grootheden $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma)$ in verdeling naar een normale verdeling convergeert, en geef de parameters van deze normale verdeling.

Dankwoord

Bij de organisatie van de LIMO zijn wij geholpen door vele instanties en personen, zonder wiens hulp de LIMO 2006 niet tot stand had kunnen komen. Ten eerste willen wij de LIMO-commissie 2005 hartelijk bedanken. Zij hebben ons veel werk bespaard door hun verrichtingen van vorig jaar met ons te delen. Wij bedanken alle sponsoren voor hun financiële bijdrage, waarmee zij deze LIMO mogelijk hebben gemaakt en het comité van aanbeveling voor hun vertrouwen. Verder danken wij de opgavenmakers voor hun uitdagende vraagstukken en hun hulp bij het nakijken. We bedanken Desda voor hun ondersteuning bij de organisatie en Mieke Janssen, Joris Sprunken en Daan Wanrooy voor hun hulp vandaag. Ook danken we Ruben van den Brink voor het presenteren van de ochtendquiz en Prof. Steenbrink voor het verzorgen van de prijsuitreiking. Tot slot willen wij graag de deelnemers bedanken. Zonder jullie had dit geen geslaagde dag kunnen worden. We hopen dat jullie allen genoten hebben en volgend jaar weer mee zullen doen. Allemaal hartelijk bedankt!

De LIMO-commissie 2006

Dion Coumans
Janneke van den Boomen
Martijn Caspers
Stijn Meurkens

Comité van aanbeveling

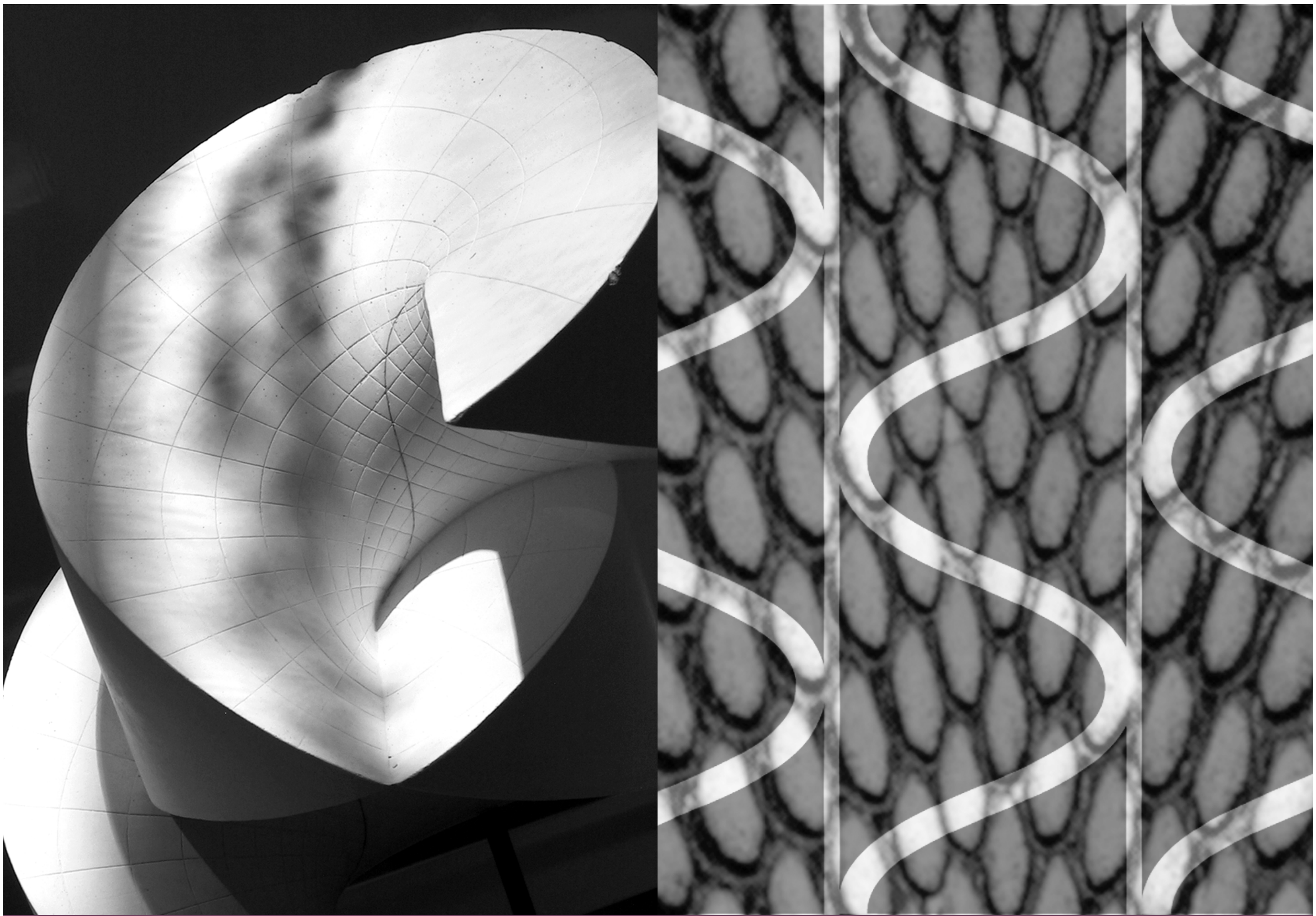
- Prof. dr. C.W.P.M. Blom, rector magnificus RU Nijmegen
- Prof. dr. S.E. Wendelaar Bonga, decaan Faculteit NWI
- Prof. dr. F.J. Keune, onderwijsdirecteur wiskunde 2005
- Prof. dr. H.P. Barendregt, winnaar spinozapremie 2002

Sponsoren

- Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen
- Koninklijk Wiskundig Genootschap
- Mathematical Research Institute
- Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek
- Optiver
- Philips
- Thomas Stieltjes Institute for Mathematics
- Foundation Compositio Mathematica

Adverteerders

- Radboud Universiteit Nijmegen
- Universiteit Leiden
- TU Eindhoven
- Rijksuniversiteit Groningen
- Universiteit Twente
- Universiteit van Amsterdam



De Universiteit van A naar Bèta

'Wiskundigen hebben een bepaald inzicht in problemen, doordat ze denken in modellen en abstracties. Wij hebben daardoor een voordeel bij het onderzoeken van toepassingen.' Aldus prof. dr. Lex Schrijver, hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam, die op 23 november 2005 de NWO-Spinozapremie ontving.

Wiskunde in de praktijk

Wiskundigen aan de Universiteit van Amsterdam houden zich bezig met uiteenlopende deelgebieden van de wiskunde. Eén van de vraagstukken waar Lex Schrijver zich de afgelopen jaren over heeft gebogen is het optimaliseren van de dienstregeling van de NS. Hoe kunnen de treinen zo worden ingezet dat de reisduur voor iedereen zo kort mogelijk is en er voldoende zitplaatsen zijn? Volgens hem maakt de combinatie van uitdagende wiskunde en aansprekende praktijkvoorbeelden zijn vakgebied aantrekkelijk. 'Er zijn praktijkvoorbeelden genoeg in mijn vakgebied. Neem het handelsreizigersprobleem: het bepalen van de kortste route van A naar B langs een bepaald aantal plaatsen. Dit probleem is niet alleen academisch van aard maar heeft diverse toepassingen in de praktijk. Een ander voorbeeld uit de industrie, naast de dienstregeling van de NS, is het bepalen van de meest efficiënte "route" voor het boren van honderden gaatjes in een computerchip.' Een deel van de Spinozapremie, die Schrijver onder meer ontving voor zijn baanbrekende en inspirerende onderzoek op het gebied van combinatoriek en algoritmiek, zal hij inzetten voor versterking van de band tussen wiskunde en haar toepassing.

Wiskunde aan de UvA

Aan de UvA wordt een breed scala aan wiskunde aangeboden, van zuivere wiskunde, inclusief logica, tot toegepaste wiskunde, statistiek en financiële wiskunde. Op al deze gebieden heeft de UvA binnen de wetenschap een naam hoog te houden. Voor studenten is dit ook aantrekkelijk, omdat docenten de onderzoeksresultaten van vandaag verwerken in de colleges van morgen.

Je master aan de UvA?

- Logic
- Mathematical Physics
- Mathematics
- Stochastics and Financial Mathematics
- Theoretical Physics

Meer informatie:
www.studeren.uva.nl/science-masters

Universiteit van Amsterdam

06119

Proof is the idol before whom the pure mathematician tortures himself.

Sir Arthur Eddington (1882-1944)